JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 45, 274–292 (1982)

Diffusions Conditionnelles. II. Générateur Conditionnel. Application au filtrage

JEAN-MICHEL BISMUT

Département de Mathématique, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, France

ET

DOMINIQUE MICHEL

Laboratoire associé au CNRS n°213, Université de Paris VI, Place Jussieu, F-75230 Paris Cedex 05, France

Communicated by Paul Malliavin

Received April, 1981; revised October, 1981

This paper is a continuation of "Diffusions conditionelles, I." If (x_t, z_t) is a two-component diffusion process, it is shown that under appropriate conditions, the process x_t $(t \leqslant T)$, given $(z_s, s \leqslant T)$ is a nonhomogeneous strong Markov process, whose generator is explicitly found by using the theory of stochastic flows. The filtering equation is reduced to an ordinary partial differential equation.

Cet article est la suite de [13]. Le lecteur est invité à se reporter à [13] pour les notations et pour une bibliographie plus complète. Nous avons pris connaissance de trois références après la rédaction de l'article. Dans [14], Blagoveshchenskii et Freidlin avaient annoncé la différentiabilité des solutions d'une équation différentielle stochastique par rapport aux conditions initiales. Dans [15], Ventzell a donné des applications de la formule de changement de variable décrivant l'image d'une semimartingale par le flot d'une équation différentielle stochastique en théorie du filtrage. Cette formule a été montrée par Rozovskii dans [16], et redémontrée dans [3]. Nous avons ici essentiellement besoin du résultat de [3] donnant la propriété de difféomorphisme du flot et de la formule de Ito–Stratonovitch sur le flot inverse de [3].

0022-1236/82/020274–19$02.00/0

3. Structure du processus conditionnel

L'objet de ce chapitre est de construire explicitement le processus de prédiction τ_T^z. On va en effet vérifier dans la suite que, sous certaines hypothèses, les lois τ_T^z définissent elles-mêmes des lois de processus de Markov non homogènes. Comme les τ_T^z ne sont en général pas des lois de diffusion, on va transformer ces lois à l'aide du flot $\psi \cdot (\tilde{\omega}, \cdot)$ et obtenir ainsi de "vraies" diffusions, qui sont solutions de problèmes de martingales bien connus, dont on peut ainsi calculer les caractéristiques locales.

Dans le paragraphe (a), on définit les principales hypothèses et notations du problème. Au paragraphe (b), on résoud le problème dans le cas "trivial" où $l=0$, et on obtient certains résultats simples dans le cas où $l \neq 0$. Au paragraphe (c), on établit une formule d'intégration par parties dans la densité de Girsanov et un résultat de représentation de cette densité en tant que martingale conditionnelle et on déduit les principaux résultats sur la structure du processus τ_T^z. Au paragraphe (d), on construit un drap prédictif, i.e., on réalise sur un même espace de probabilité toutes les lois τ_T^z à partir d'une famille de diffusions dépendant d'un paramètre T.

Dans [11], sous des hypothèses d'ellipticité partielle, et pour $T > 0$ fixé, Pardoux a obtenu, par une méthode d'équations stochastiques aux dérivées partielles un résultat qui révèle, au moins implicitement, la structure de τ_T^z. La méthode employée ici donne un résultat plus fort puisqu'elle permet de se passer de toute hypothèse d'ellipticité et donne le résultat souhaité pour tous les T simultanément.

(a) *Hypothèses et notations*

On conserve les principales hypothèses et notations des sections précédentes.

Dans toute la section, on fait l'hypothèse $\mathbb{H}2$, définie à la section (1c), qui garantit l'identité des filtrations engendrées par z et $\tilde{w}$. Cette hypothèse nous permettra de simplifier l'énoncé des résultats.

(b) *Un premier résultat sur les processus conditionnels*

On s'intéresse tout d'abord au cas $l=0$. On a le résultat élémentaire suivant:

Théorème 3.1. *Q p.s., pour la mesure R^z, la loi du processus $\bar{x}_t = \pi^1 \psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))$ est une diffusion de générateur infinitésimal:*

$$\frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} [\pi^1 \psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, \bar{x}, z_0)\, Y_l(\psi_t(\tilde{\omega}, \bar{x}, z_0))]^2. \tag{3.1}$$

Q-p.s., pour la mesure R^z, la loi τ_∞^z de $\pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)$ est la loi d'un processus fortement markovien.

Preuve. La première partie du théorème est une conséquence immédiate du théorème 1.6. Comme, pour $\tilde{\omega}$ fixé, $\bar{x}_t$ est une diffusion, c'est un processus fortement markovien. Pour $\tilde{\omega}$ fixé, $\pi^1\psi_t(\tilde{\omega}, \bar{x}_t, z_0)$ est donc fortement markovien. ∎

On définit alors le processus τ_T^z par le théorème 2.5 dans le cas où $l=0$. Du théorème 3.1, on tire immédiatement:

THÉORÈME 3.2. *Il existe un Q-négligeable $\mathscr{N}$ tel que si $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathscr{N}$, pour tout $T \geqslant 0$, τ_T^z est tel que, si f est une fonction mesurable bornée sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$, alors:*

$$\int f(x)\, d\tau_T^z(x) = \int f(x/T/x')\, d\tau_\infty^z(x)\, dH^0_{x_T, z_T}(x', z'). \tag{3.2}$$

Preuve. C'est immédiat par le théorème 2.8 et le théorème 3.1. ∎

Remarque 1. Ce cas est facile dans la mesure où le processus z est lui-même un processus de Markov. L'utilité du flot $\psi.\ (\tilde{\omega}, \cdot)$ est de nous permettre de décrire la loi τ_∞^z, qui en général n'est pas la loi d'une diffusion au sens classique du terme. On va maintenant appliquer ce résultat au cas $l \neq 0$ en utilisant la transformation de Girsanov déjà utilisée au chapitre 2.

DEFINITION 3.3. On note $\hat{L}_t$ (resp. $\hat{l}_t^j$) la projection optionnelle sur $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P \otimes \tilde{P})$ (resp. P^l) relativement à la filtration $(\mathscr{B}_{t+}^{\tilde{w}})_{t\geqslant 0}$ du processus L_t (resp. $l_j(\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))$).

On a naturellement:

$$\hat{L}_t = \int_\Omega L_t(\omega, \tilde{\omega})\, dP(\omega) \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}^+ \quad \text{p.s.} \tag{3.3}$$

Il est classique [10] que $\hat{L}_t$ est une $\mathscr{B}_{t+}^{\tilde{w}}$-martingale sur $(\Omega \times \tilde{\Omega},\ P \otimes \tilde{P})$ et que, de plus:

$$\hat{L}_t = \exp\left\{\int_0^t \hat{l}_j \delta\tilde{w}^j - \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^d \int_0^t |\hat{l}_j|^2\, ds\right\}. \tag{3.4}$$

Alors, si $\tilde{Q}^l$ est la loi de $\tilde{w}$ pour $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P^l)$, on a:

$$\frac{d\tilde{Q}^l}{d\tilde{Q}^0} \Big| \mathscr{B}_{t+}^{\tilde{w}} = \hat{L}_t$$

et ainsi, pour $\tilde{Q}^l$, $\tilde{w}_t - \int_0^t \hat{l}\, ds$ est une martingale brownienne.

On a alors un résultat très proche du théorème 2.8.

THÉORÈME 3.4. *Si h_t est un processus mesurable borné sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$,* *alors une projection optionnelle sur* $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P^l)$ *de* $h(\pi^1\varphi.(\omega, \tilde{\omega}, y_0))$ *relativement à la filtration* $\{\mathscr{B}_{t+}^{\tilde{w}}\}_{t\geqslant 0}$ *est donnée par:*

$$\frac{1}{\hat{L}_t}\int h(\pi^1\varphi.(\omega, \tilde{\omega}, y_0)/t/x')\, L_t(\omega, \tilde{\omega})\, dP(\omega)$$
$$\times\, dH^l_{\pi^1\varphi_t(\omega,\tilde{\omega},y_0),z_t}(x', z'). \tag{3.5}$$

Preuve. Compte tenu de l'identité des filtrations $\{\mathscr{B}_t^{z*}\}_{t\geqslant 0}$ et $\{\mathscr{B}_{t+}^{\tilde{w}*}\}_{t\geqslant 0}$, le théorème résulte immédiatement du théorème 2.8. ▮

Il résulte de ce théorème que la loi du processus x_s, $s \leqslant T$ conditionné par $\mathscr{B}(z_s, s \leqslant T)$ est, pour p.t. $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ fixé, l'image par le flot $\pi^1\psi_t(\tilde{\omega}, ., z_0)$ de la loi du processus $\bar{x}_t$ défini au théorème 3.1, sur $(\Omega, (L_T(\omega, \tilde{\omega})/\hat{L}_T(\tilde{\omega}))\, dP(\omega))$. On va montrer que cette dernière loi est celle d'un processus de Markov en réalisant $L_T(\omega, \tilde{\omega})/\hat{L}_T(\tilde{\omega})$ comme une densité de Girsanov et en appliquant le théorème de Girsanov à $\tilde{\omega}$ fixé. On établit tout d'abord un résultat élémentaire sur les martingales sur $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P \otimes \tilde{P})$ relativement à la filtration grossie $\{\mathscr{B}_{t+}^{w,\tilde{w}\to T}\}_{t\geqslant 0}$ définie par

$$\mathscr{B}_t^{w,\tilde{w}\to T} = \mathscr{B}(w_u, u \leqslant t, \tilde{w}_s, s \leqslant T). \tag{3.6}$$

Sur $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P \otimes \tilde{P})$, w est encore une martingale brownienne relativement à la filtration $\{\mathscr{B}_{t+}^{w,\tilde{w}\to T}\}_{t\geqslant 0}$. On a alors le résultat suivant:

PROPOSITION 3.5. *Soit* M_t *une martingale de carré intégrable sur* $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P \otimes \tilde{P})$ *relativement à la filtration* $\{\mathscr{B}_{t+}^{w,\tilde{w}\to T}\}_{t\geqslant 0}$. *Alors* M *est continue, et il existe une fonction* a $\mathscr{B}_T^{\tilde{w}}$*-mesurable de carré intégrable et un processus* $H = (H_1 \cdots H_m)$ *prévisible relativement à la filtration* $\{\mathscr{B}_{t+}^{w,\tilde{w}\to T}\}_{t\geqslant 0}$ *tels que*

(a) $E^{P\otimes\tilde{P}} \int_0^t |H_s|^2\, ds < +\infty$,

(b) $M_t = a + \int_0^t H_i \delta w^i$

a (resp. H) est $dP \otimes d\tilde{P}$ *(resp.* $dP \otimes d\tilde{P} \otimes dt$*) essentiellement unique.*

Preuve. Supposons tout d'abord M_∞ de la forme

$$M_\infty = C(\omega)\, D(\tilde{\omega}). \tag{3.7}$$

Alors par un résultat classique de Ito on sait que

$$C(\omega) = b + \int_0^{+\infty} H_{i,s}(\omega)\, \delta w^i \tag{3.8}$$

avec $b \in R$, et H_t prévisible relativement à $\{\mathscr{B}_{t+}^{w}\}_{t>0}$. Donc

$$M_\infty = bD(\tilde{\omega}) + \int_0^{+\infty} H_{i,s}(\omega)\, D(\tilde{\omega})\, \delta w^i. \tag{3.9}$$

La proposition est démontrée dans ce cas particulier. On applique le Théorème des classes monotones pour en déduire le cas général. ∎

Fixons alors $T > 0$. Soit $\bar{L}_t^T$ la martingale continue >0:

$$\bar{L}_t^T = E^{P \otimes \tilde{P}}[L_T \mid \mathscr{B}_{t+}^{w,\tilde{w} \to T}]. \tag{3.10}$$

Par la proposition 3.5, on sait qu'il existe $\bar{H}_t^T(\omega, \tilde{\omega})$ prévisible relativement à la filtration $\{\mathscr{B}_t^{w,\tilde{w}\to T}\}_{t>0}$ tel que

$$\bar{L}_t^T = \hat{L}_T + \int_0^t \bar{H}_{i,s}^T \delta w^i. \tag{3.11}$$

On a alors immédiatement:

Proposition 3.6. *Si b_t^T est le processus prévisible relativement à la filtration $\{\mathscr{B}_{t+}^{w,\tilde{w}\to T}\}_{t>0}$, $b_{i,s}^T = \bar{H}_{i,s}^T / \bar{L}_s^T$, on a:*

$$\frac{L_T}{\bar{L}_T} = \exp\left\{\int_0^T \langle b_{i,s}^T, \delta w^i\rangle - \tfrac{1}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^m |b_{i,s}^T|^2\, ds\right\}. \tag{3.12}$$

Preuve. Par (3.11), on a:

$$d\bar{L}_t^T = \bar{L}_t^T b_{i,t}^T \delta w^i \tag{3.13}$$

et donc classiquement on a (3.12). ∎

Notons alors que pour $\tilde{P}$ presque tout $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, on a:

$$\int_\Omega \left[\exp \int_0^T \langle b_{i,s}^T, \delta w^i\rangle - \tfrac{1}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^m |b_{i,s}^T|^2\, ds\right] dP(\omega) = 1. \tag{3.14}$$

Notons enfin que par le lemme 1.5, pour $\tilde{P}$ p.t. $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, $\int_0^T \langle b_{i,s}^T, \delta w^i\rangle$ coincide avec l'intégrale stochastique $\int_0^T \langle b_{i,s}^T, \delta w^i\rangle$ calculée avec $\tilde{\omega}$ fixé. Par réapplication du Théorème de Girsanov, compte tenu de (3.14), il est alors clair que $\tilde{P}$ p.s., pour la mesure

$$\frac{L_T}{\bar{L}_T}(\omega, \tilde{\omega})\, dP(\omega), \qquad w_t - \int_0^t b_s^T\, ds$$

est une martingale brownienne sur Ω, relativement à la filtration $\{\mathscr{B}_{t+}^{w}\}_{t>0}$. On peut réexprimer ce résultat en disant que, pour la mesure de probabilité $L_T\, dP(\omega)\, d\tilde{P}(\tilde{\omega})$, $w_t - \int_0^t b_s^T\, ds$ est une martingale brownienne relativement à la filtration grossie $\{\mathscr{B}_{t+}^{w,\tilde{w}\to T}\}$.

Des résultats précédents, on va déduire un résultat encore très incomplet sur la structure du processus conditionnel avant T sachant $\mathscr{B}_T^z$. On a en effet:

THÉORÈME 3.7. *Pour tout $T \geqslant 0$, $\tilde{P}$ p.s., la loi image sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$ de τ_T^z par l'application $x \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n) \to \pi^1 \psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, x_t, z_t) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$ s'obtient, pour tout $t \leqslant T$, par la résolution sur $(\Omega, (L_T/\hat{L}_T)\, dP)$ de l'équation différentielle stochastique:*

$$d\bar{x} = \pi^1 \psi_t^{*-1} Y_i(\bar{x}, z_0)\, dw^i,$$
$$\bar{x}(0) = x_0 \tag{3.15}$$

et, sur $(\Omega, (L_T/\hat{L}_T)\, dP)$, $w_t - \int_0^t b_s^T\, ds$ est une martingale brownienne relativement à la filtration $\{\mathscr{B}_{t+}^w\}_{t \geqslant 0}$.

Preuve. Par la théorème 1.6, on sait que $\tilde{P}$ p.s. $\bar{y} = (\bar{x}, z_0)$ s'obtient comme solution de l'équation différentielle 1.18 qu'on peut résoudre à $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ fixé. On obtient le théorème en appliquant le théorème de Girsanov. ∎

Remarque 2. Pour tout T, pour $\tilde{P}$ p.t. $\tilde{\omega}$, on peut décrire la loi τ_T^z comme étant l'image par le flot $\psi_\cdot(\tilde{\omega}, \cdot)$, qui est connu, d'une diffusion.

L'objet des paragraphes suivants va être de préciser complètement la structure de cette diffusion.

(c) *Représentation régulière de la densité de Girsanov comme martingale conditionnelle*

Le but de ce paragraphe est de calculer explicitement les $b_s^{i,T}$ définis au paragraphe précédent. La première difficulté est qu'on ne peut pas fixer $\tilde{\omega}$ dans $L_T/\hat{L}_T$ puisqu'il y figure une intégrale stochastique par rapport à $\tilde{w}$. Dans certains cas simples, on peut résoudre ce problème en effectuant une intégration par parties dans l'intégrale stochastique. On va ici obtenir cette intégration par parties par l'utilisation de flots, puis on appliquera le résultat de représentation de martingales de Haussmann [8].

Dans toute la suite, on fait les hypothèses $\mathbb{H}1$ et $\mathbb{H}2$ et, en plus, l'hypothèse:

$\mathbb{H}6$: La projection sur $\mathbb{R}^n$ des supports de $l^1 \cdots l^d$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ est bornée.

Les hypothèses $\mathbb{H}1$ et $\mathbb{H}6$ ont pour objet de simplifier quelque peu les arguments qui vont suivre.

Complétons le système (1.3) en lui ajoutant une composante supplémentaire, i.e., considérons l'équation différentielle stochastique:

$$
\begin{aligned}
dx &= X_0(x,z)\,dt + \tilde{X}_j(x,z)\,d\tilde{w}^j,\\
dz &= Z_0(z)\,dt + Z_j(z)\,d\tilde{w}^j,\\
dv &= l^j(x,z)\,d\tilde{w}^j - \tfrac{1}{2}[\tilde{Y}_j l^j(x,z) + |l^j|^2\,(x,z)]\,dt,\\
x(0) &= x_0, \qquad z(0) = z_0, \qquad v(0) = 0.
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

Alors, par le théorème 1.2, on peut régulariser en (x_0, z_0) les solutions de (3.16). On peut écrire, dans (3.16):

$$
\begin{aligned}
(x_t, z_t) &= \psi_t(\tilde{\omega}, x_0, z_0),\\
v_t &= v_t(\tilde{\omega}, x_0, z_0)
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

où $\psi_t(\tilde{\omega}, \cdot)$ a été construit au théorème 1.2 et où $v_t(\tilde{\omega}, \cdot)$ est une fonction mesurable en $\tilde{\omega}$, continue en (t, x_0, z_0), C^∞ en (x_0, z_0) à dérivées de tous ordres en (x_0, z_0) continues en (t, x_0, z_0).

On a alors un résultat qui va nous être très utile pour la suite:

THÉORÈME 3.8. *Sur* $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P \otimes \tilde{P})$, *si* $\bar{y}_t = \psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0))$, *on a:*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{d} \int_0^T l^j(\varphi_s(\omega, \tilde{\omega}, y_0))\,\delta\tilde{w}^j - \tfrac{1}{2}\int_0^T \sum_{j=1}^{d} |l^j|^2\,(\varphi_s(\omega, \tilde{\omega}, y_0))\,ds\\
&= v_T(\tilde{\omega}, \bar{y}_T) - \int_0^T \frac{\partial v_s}{\partial \bar{y}}\,(\tilde{\omega}, \bar{y}_s)\,d\bar{y}_s\\
&= v_T(\tilde{\omega}, \bar{y}_T) - \int_0^T \frac{\partial v_s}{\partial \bar{y}}\,(\tilde{\omega}, \bar{y}_s)(\psi_s^{*-1}(\tilde{\omega}, \cdot)\,Y_i)(\bar{y}_s)\,dw^i.
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la formule de Ito–Stratonovitch généralisée du théorème 2.3 de [3] (voir aussi le théorème 7 de [2]). ∎

En raisonnant comme au paragraphe 1(c), on sait que $\tilde{P}$ p.s., pour tout $T \geqslant 0$, les applications:

$$
(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \frac{\partial^m \psi_t}{\partial x^m}\,(\tilde{\omega}, x, z_0),
$$

$$
\left[\frac{\partial \psi_t}{\partial x}\,(\tilde{\omega}, x, z_0)\right]^{-1}, \qquad v_t(\tilde{\omega}, x, z_0), \qquad \frac{\partial^m v_t}{\partial x^m}\,(\tilde{\omega}, x, z_0) \tag{3.19}
$$

sont uniformément bornées par des constantes ne dépendant que de T, m, $\tilde{\omega}$.

Dans tout ce qui suit, on suppose que $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ a été fixé, pour lequel toutes les propriétés de régularité de $\psi.(\tilde{\omega}.)$, $v.(\tilde{\omega}, \cdot)$ et les propriétés (3.19) sont vérifiées. Pour alléger les notations, on omettra le paramètre $\tilde{\omega}$ chaque fois que c'est possible.

Sur (Ω, P), pour $t' \geqslant 0$ fixé, considérons l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} d\bar{x}_t &= \pi^1 \psi^{*-1}_{t+t'} Y_i(\bar{x}_t, z_0)\, dw^i, \\ \bar{x}(0) &= x, \\ d\bar{h}_t &= \frac{\partial v_{t+t'}}{\partial \bar{x}}(\bar{x}_t, z_0)\, \psi^{*-1}_{t+t'} Y_i(\bar{x}_t, z_0)\, dw^i, \\ \bar{h}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Les champs $(\psi^{*-1}_{t+t'} Y_i(\bar{x}, z_0), (\partial v_{t+t'}/\partial x)(\bar{x}, z_0)\, \psi^{*-1}_{t+t'} Y_i(\bar{x}, z_0))$ sont continus en $(t, \bar{x})$, C^∞ en $\bar{x}$ à dérivées continues en $(t, \bar{x})$, et tels que pour $t \leqslant T$, ils sont bornés à dérivées bornées. A (3.20), par les Théorèmes I–1.2 et I.2.1 de [1], on peut associer un flot continu de difféomorphismes de $\mathbb{R}^n$, $\rho_t^{t', \tilde{\omega}}(\omega, x)$ et une fonction $\sigma_t^{t', \tilde{\omega}}(\omega, x)$, continue en (t, x), C^∞ en x à dérivées en x continues en (t, x), tels que dans (3.20)

$$\begin{aligned} \bar{x}_t &= \rho_t^{t', \tilde{\omega}}(\omega, x), \\ \bar{h}_t &= \sigma_t^{t', \tilde{\omega}}(\omega, x). \end{aligned} \tag{3.21}$$

DÉFINITION 3.9. On note $u(\tilde{\omega}, t', t'', x)$ la fonction définie sur $\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ par

$$\begin{aligned} u(\tilde{\omega}, t', t'', x) = \int_\Omega \exp[&v_{t'+t''}(\tilde{\omega}, \rho_{t''}^{t', \tilde{\omega}}(\omega, x), z_0)) \\ &- v_{t'}(\tilde{\omega}, x, z_0) - \sigma_{t''}^{t', \tilde{\omega}}(\omega, x)]\, dP(\omega). \end{aligned} \tag{3.22}$$

On a alors le résultat très important suivant

THÉORÈME 3.10. *La fonction $u(\tilde{\omega}, t', t'', x)$ est mesurable sur $\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$. Pour $\tilde{P}$ p.t. $\tilde{\omega}$, elle est continue en (t', t'', x), C^∞ en x, à dérivées en x continues en (t', t'', x), et de plus pour tout $T > 0$, sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$, $u(\tilde{\omega}, t', t'', x)$ et ses dérivées en x sont bornées, et $(1/u)(\tilde{\omega}, t', t'', x)$ est également borné. Enfin:*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}(\tilde{\omega}, t', t'', x) \\ &\quad = \int_\Omega \exp\{v_{t'+t''}(\tilde{\omega}, \rho_{t''}^{t', \tilde{\omega}}(\omega, x), z_0) \\ &\qquad - v_{t'}(\tilde{\omega}, x, z_0) - \sigma_{t''}^{t', \tilde{\omega}}(\omega, x)\} \\ &\qquad \times \left[\frac{\partial v_{t'+t''}}{\partial x}(\tilde{\omega}, \rho_{t''}^{t', \tilde{\omega}}(\omega, x), z_0) \frac{\partial \rho_{t''}^{t', \tilde{\omega}}}{\partial x}(\omega, x) \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial v_{t'}}{\partial x}(\tilde{\omega}, x, z_0) - \frac{\partial \sigma_{t''}^{t', \tilde{\omega}}}{\partial x}(\omega, x) \right] dP(\omega). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Preuve. La mesurabilité de u est immédiate et laissée au lecteur. De plus, pour $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ fixé comme précédemment

$$(t', t'', x) \in [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n \to v_{t'+t''}(\tilde{\omega}, x, z_0)$$

est continue bornée, et ses dérivées en x sont continue et bornées. De plus

$$\sigma_{t''}^{t',\tilde{\omega}}(\omega, x) = \int_0^{t''} (\psi_{t'+s}^{*-1} Y_l)\, v_{t'+s}(\rho_s^{t',\tilde{\omega}}(\omega, x), z_0))\, \delta w^l$$
$$+ \tfrac{1}{2} \int_0^{t''} (\psi_{t'+s}^{*-1} Y_l)^2\, v_{t'+s}(\rho_s^{t',\tilde{\omega}}(\omega, x), z_0)\, ds. \tag{3.24}$$

Comme $(\psi_{t'+s}^{*-1} Y_l)\, v_{t'+s}$ et $(\psi_{t'+s}^{*-1} Y_l)^2\, v_{t'+s}$ sont uniformément bornés (pour $\tilde{\omega}$ fixé!) quand $t' \leqslant T$, $s \leqslant T$, on en déduit, par un résultat classique sur les martingales exponentielles, que pour $\tilde{\omega}$ fixé,

$$\omega \to M_{t',t'',x}^{\tilde{\omega}}(\omega) = \exp\{v_{t'+t''}(\tilde{\omega}, \rho_{t''}^{t',\tilde{\omega}}(\omega, x), z_0)$$
$$- v_{t'}(\tilde{\omega}, x, z_0) - \sigma_{t''}^{t',\tilde{\omega}}(\omega, x)\} \tag{3.25}$$

est dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ sur (Ω, P) avec une norme L_p uniformément bornée pour $(t', t'', x) \in [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

En utilisant un Théorème de point fixe il est très facile de voir que si $(t'_n, t''_n, x_n) \to (t', t'', x)$, alors sur (Ω, P), $(\rho_{t''_n}^{t'_n,\tilde{\omega}}(\omega, x_n), \sigma_{t''_n}^{t'_n,\tilde{\omega}}(\omega, x_n))$ converge en probabilité vers $(\rho_{t''}^{t',\tilde{\omega}}(\omega, x), \sigma_{t''}^{t',\tilde{\omega}}(\omega, x))$. On a donc bien montré que $\tilde{P}$ p.s., $u(\tilde{\omega}, t', t'', x)$ est continue et telle que si $t' \leqslant T$, $t'' \leqslant T$, elle est bornée. Le fait que $1/u(\tilde{\omega}, \cdot)$ soit bornée sur le même ensemble résulte de considérations élémentaires sur la croissance (pour $\tilde{\omega}$ fixé!) des intégrales stochastiques

$$\int_0^{t''} (\psi_{t'+s}^{*-1} Y_l)\, v_{t'+s}(\rho_s^{t',\tilde{\omega}}(\omega, x), z_0))\, \delta w^l.$$

On a:

$$\frac{\partial M_{t',t'',x}^{\tilde{\omega}}}{\partial x}(\omega)$$
$$= M_{t',t'',x}^{\tilde{\omega}} \left[\frac{\partial v_{t'+t''}}{\partial x}(\omega, \rho_{t''}^{t',\tilde{\omega}}(\omega, x), z_0)\, \frac{\partial \rho_{t''}^{t',\tilde{\omega}}}{\partial x}(\omega, x) \right.$$
$$\left. - \frac{\partial v_{t'}}{\partial x}(\tilde{\omega}, x, z_0) - \frac{\partial \sigma_{t''}^{t',\tilde{\omega}}}{\partial x}(\tilde{\omega}, x) \right]. \tag{3.26}$$

Notons alors que pour $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ fixé comme précédemment:

(a) $(\partial v_{t'+t''}/\partial x)(\tilde{\omega}, x, z_0)$ est borné sur $[0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^n$.

(b) Par les résultats de [1]—Théorème I.1.2 et I.2.1, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sup_{\substack{|x| \leqslant N \\ t', t'', \leqslant T}} \left| \frac{\partial \rho_{t''}^{t', \tilde{\omega}}}{\partial x} (\omega, x) \right|, \qquad \sup_{\substack{|x| \leqslant N \\ t', t'', \leqslant T}} \left| \frac{\partial \sigma_{t''}^{t', \tilde{\omega}}}{\partial x} (\omega, x) \right| \tag{3.27}$$

sont dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ sur (Ω, P). On peut donc dériver (3.22) sous le signe d'intégration et obtenir (3.23). La continuité de $(\partial u/\partial x)(\tilde{\omega}, t', t'', x)$ se montre en utilisant en particulier le point (b) précédent. On raisonne de même pour les dérivées successives en x de $u(\tilde{\omega}, t', t'', x')$. ∎

DÉFINITION 3.11. On définit la fonction $b_t^{i,T}(\tilde{\omega}, x)$ pour $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in \mathbb{R}^n$ par

$$b_t^{i,T}(\tilde{\omega}, x) = \frac{(\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, \cdot)\, Y_i)(x, z_0)\, u(\tilde{\omega}, t, T-t, x)}{u(\tilde{\omega}, t, T-t, x)} \tag{3.28}$$

On a alors le résultat très important suivant:

THÉORÈME 3.12. *Pour $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, soit $\bar{y}_t$ la solution sur (Ω, P) de l'équation différentielle stochastique*

$$d\bar{y} = (\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, \cdot)\, Y_i)(\bar{y})\, dw^i,$$
$$\bar{y}(0) = (x_0, z_0) \tag{3.29}$$

et soit $\bar{x}_t = \pi^1 \bar{y}_t$. Alors pour tout $T > 0$, pour $\tilde{P}$ p. tout $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, sur (Ω, P), on a:

$$\frac{L_T(\omega, \tilde{\omega})}{\hat{L}_T(\tilde{\omega})} = \exp \left\{ \int_0^T \sum_{i=1}^m b_t^{i,T}(\tilde{\omega}, \bar{x}_t)\, \delta w^i - \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^m |b_t^{i,T}(\tilde{\omega}, \bar{x}_t)|^2\, dt \right\} \qquad P\ p.s. \tag{3.30}$$

Preuve. On a:

$$L_T(\omega, \tilde{\omega}) = \exp\{v_T(\tilde{\omega}, \rho_T^{0,\tilde{\omega}}(\omega, x_0), z_0) - \sigma_T^{0,\tilde{\omega}}(\omega, x_0)\}. \tag{3.31}$$

Appliquons alors le résultat de Haussmann [8], énoncé au Théorème 2.2 de [4]. Pour $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ fixé, on a:

$$L_T(\omega, \tilde{\omega}) = \hat{L}_T(\omega, \tilde{\omega}) + \int_0^T H_{i,t}^{T,\tilde{\omega}} \delta w^i \tag{3.32}$$

où $H_{l,t}^{T,\tilde{\omega}}$ est la projection prévisible sur (Ω, P) relativement à la filtration $\{\mathscr{B}_{t+}^{w}\}_{t\geqslant 0}$ du processus $R_t^{T,\tilde{\omega}}$ défini par

$$\begin{aligned} R_t^{T,\tilde{\omega}} = L_T(\omega, \tilde{\omega}) \Bigg[&\left\langle \frac{\partial v_T}{\partial x}(\tilde{\omega}, \rho_T^{0,\tilde{\omega}}(\omega, x_0), z_0), \right. \\ &\left. \times (\rho_T^{0,\tilde{\omega}})^* ((\rho_t^{0,\tilde{\omega}})^{*-1} \psi_t^{*-1} Y_t(y_0)) \right\rangle \\ &- \left\langle \frac{\partial v_t}{\partial x}(\tilde{\omega}, \rho_t^{0,\tilde{\omega}}(\omega, x_0), z_0), \psi_t^{*-1} Y_t(\rho_t^{0,\tilde{\omega}}(\omega, x_0), z_0) \right\rangle \\ &- \left\langle \frac{\partial \sigma_T^{0,\tilde{\omega}}}{\partial x}(\omega, x_0) - \frac{\partial \sigma_t^{0,\tilde{\omega}}}{\partial x}(\omega, x_0), ((\rho_t^{0,\tilde{\omega}})^{*-1} \psi_t^{*-1} Y_t)(y_0) \right\rangle \Bigg]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Or grâce à la propriété de Markov du flot $\rho_{\cdot}^{0,\tilde{\omega}}(\omega, \cdot)$ [1–3], pour $t \leqslant T$ fixé on a:

$$\rho_T^{0,\tilde{\omega}} = \rho_{T-t}^{t,\tilde{\omega}}(\theta_t \omega, \cdot) \circ \rho_t^{0,\tilde{\omega}}(\omega, \cdot) \quad (3.34)$$

où θ_t est l'opérateur qui à $\omega = (w_s) \in \Omega$ associe $\theta_t \omega = (w_{t+s} - w_t)$. De même on a:

$$\sigma_T^{0,\tilde{\omega}}(\omega, \cdot) = \sigma_t^{0,\tilde{\omega}}(\omega, \cdot) + \sigma_{T-t}^{t,\tilde{\omega}}(\theta_t \omega, \cdot) \circ \rho_t^{0,\tilde{\omega}}(\omega, \cdot).$$

Comme θ_t préserve la mesure Brownienne P, pour $t \in \mathbb{R}^+$, on a:

$$\begin{aligned} H_{l,t}^{T,\tilde{\omega}}(\omega) &= E^P[R_t^{T,\tilde{\omega}} \mid \mathscr{B}_{t+}^{w}] \\ &= L_t(\omega, \tilde{\omega}) \int_\Omega \exp\Big[v_T(\tilde{\omega}, \rho_{T-t}^{t,\tilde{\omega}}(\omega', \bar{x}_t), z_0) \\ &\qquad - v_t(\tilde{\omega}, \bar{x}_t, z_0) - \sigma_{T-t}^{t,\tilde{\omega}}(\omega', \bar{x}_t) \Big] \\ &\qquad \times \left\langle \frac{\partial v_T}{\partial x}(\tilde{\omega}, \rho_{T-t}^{t,\tilde{\omega}}(\omega', \bar{x}_t), z_0)(\rho_{T-t}^{t,\tilde{\omega}})^* (\omega', \cdot) \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial v_t}{\partial x}(\tilde{\omega}, \bar{x}_t, z_0) - \frac{\partial \sigma_{T-t}^{t,\tilde{\omega}}}{\partial x}(\omega', \bar{x}_t), \psi_t^{*-1} Y_t(\bar{x}_t, z_0) \right\rangle dP(\omega') \\ &= L_t(\omega, \tilde{\omega}) \, [(\psi_t^{*-1} Y_t)(\bar{x}_t, z_0) \, u(\tilde{\omega}, t, T-t, \bar{x}_t)]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Or par le Théorème VI.47 de [6], $H_{l,t}^{T,\tilde{\omega}}(\omega)$ est un processus continu en t. Comme le membre de droite de (3.35) est continu en t, on en déduit que, pour tout T, $\tilde{P}$ p.s., on a:

$$H_{l,t}^{T,\tilde{\omega}}(\omega) = L_t(\omega, \tilde{\omega}) \, [(\psi_t^{*-1} Y_t)(\bar{x}_t, z_0) \, u(\tilde{\omega}, t, T-t, \bar{x}_t)], \qquad t \leqslant T. \quad (3.36)$$

De la même manière, il est clair que si $N_t^{T,\tilde{\omega}}$ est la martingale continue sur (Ω, P)

$$N_t^{T,\tilde{\omega}} = E^P[L_T \mid \mathscr{B}_{t+}^w] \tag{3.37}$$

on a pour $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ fixé, P p.s., pour $t \leqslant T$.

$$N_t^{T,\tilde{\omega}} = L_t u(\tilde{\omega}, t, T-t, \bar{x}_t). \tag{3.38}$$

De (3.32) et (3.38), on déduit que

$$\begin{aligned} dN_t^{T,\tilde{\omega}} = H_{i,t}^{T,\tilde{\omega}} \delta w^i = N_t^{T,\tilde{\omega}} \frac{(\psi_t^{*-1} Y_i)\, u(\tilde{\omega}, t, T-t, \bar{x}_t)}{u(\tilde{\omega}, t, T-t, \bar{x}_t)} \delta w^i \\ = N_t^{T,\tilde{\omega}} b_t^{i,T}(\tilde{\omega}, \bar{x}_t)\, \delta w^i. \end{aligned} \tag{3.39}$$

De (3.39), on tire immédiatement (3.30). ∎

Remarque 3. Dans [11], Pardoux a construit, pour T fixé, la fonction $u(\tilde{\omega}, t, T-t, x)$ $(t \leqslant T)$ comme solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique rétrograde, sous la condition $\mathbb{H}3$ d'ellipticité partielle du système stochastique considéré. La construction que nous donnons ici est directe, sans aucune hypothèse d'ellipticité. De plus, on a aussi la continuité de u en T.

Notons aussi que grâce au lemme 1.5, on peut interpréter l'égalité (3.30) comme une égalité dans $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P \otimes \tilde{P})$, où pour T fixé, $\int_0^t b_t^{i,T}(\tilde{\omega}, \bar{x}_t)\, \delta w^i$ est une intégrale stochastique calculée relativement à la filtration grossie $\{\mathscr{B}_{t+}^{w,\tilde{w}\to T}\}_{t \geqslant 0}$.

On a enfin le résultat fondamental de cette section.

THÉORÈME 3.13. *$\tilde{P}$ p.s., pour tout $T \geqslant 0$, la loi image sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n)$ de τ_T^z par l'application $x \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^n) \to \pi^1 \psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, x_t, z_t)$ s'obtient pour $t \leqslant T$ par la résolution sur (Ω, P) de l'équation différentielle stochastique*

$$\begin{aligned} d\bar{x}^T &= \pi^1(\psi_t^{*-1}(\tilde{\omega}, \cdot)\, Y_i)(\bar{x}^T, z_0)(dw^i + b_t^{i,T}(\tilde{\omega}, \bar{x}^T)\, dt), \\ \bar{x}(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{3.40}$$

$\tilde{P}$ p.s., pour tout $T \geqslant 0$, τ_T^z est pour $t \leqslant T$ la loi d'un processus fortement markovien et fellerien.

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 1.6 et le Théorème de Girsanov [12]–6, ainsi que le Théorème 3.12 pour obtenir que pour tout $T \geqslant 0$, $\tilde{P}$ p.s., les lois de $\bar{x}_t$ (pour $t \leqslant T$) et de $\pi^1 \psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, x_t, z_t)$ pour τ_t^z sont identiques.

Grâce au théorème 3.10, $\tilde{P}$ p.s. pour tout $T' > 0$, la fonction (t, T, x) $(t \leqslant T \leqslant T', x \in \mathbb{R}^n) \to b_t^{\tilde{\omega},T}(x)$ est continue et bornée. Par le théorème 11.1.4

[12] de Stroock et Varadhan on sait que $\tilde{P}$ p.s., la loi de $\bar{x}^T$ donné par (3.40) dépend continûment de T. Comme τ_T^z est un processus continu, on en déduit bien l'égalité cherchée $\tilde{P}$ p.s. pour tout $T \geqslant 0$. Enfin la solution de (3.40) est clairement fortement markovienne sur $[0, T]$. On en déduit bien le Théorème 3.13. ∎

Remarque 4. Par le Théorème 2.8, la loi de x pour τ_T^z pour $t \geqslant T$ est complétement connue.

(d) *Un drap prédictif*

En plus des hypothèses $\mathbb{H}1$, $\mathbb{H}2$, $\mathbb{H}6$ on fait ici une dernière hypothèse simplificatrice.

$\mathbb{H}7$: La projection sur $\mathbb{R}^n$ des supports de $X_1(x, z) \cdots X_m(x, z)$ est bornée.

Alors le flot $\varphi.(\omega, \tilde{\omega}, \cdot)$ a les mêmes propriétés que le flot $\psi.(\tilde{\omega}, \cdot)$ sous la seule hypothèse $\mathbb{H}1$. Ainsi $P \otimes \tilde{P}$ p.s., pour tout $T \geqslant 0$, les applications

$$(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$$
$$\rightarrow \frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(\omega, \tilde{\omega}, x, z_0), \left[\frac{\partial \varphi_t}{\partial x}(\omega, \tilde{\omega}, x, z_0)\right]^{-1}, \frac{\partial^m \varphi_t}{\partial x^m}(\omega, \tilde{\omega}, x, z_0) \tag{3.41}$$

sont uniformément bornées.

DÉFINITION 3.14. On pose

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R}^n, \qquad & \bar{u}(\tilde{\omega}, t', t'', x) = u(\tilde{\omega}, t', t'', \pi^1 \psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, x, z_0)), \\ (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \qquad & \bar{b}_t^{i, T, \tilde{\omega}}(x, z) = \frac{(Y_i \bar{u})(\tilde{\omega}, t', t'', x)}{\bar{u}(\tilde{\omega}, t', t'', x)}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

On a alors un résultat purement descriptif.

THÉORÈME 3.15. *Sur $(\Omega \times \Omega, P \otimes \tilde{P})$, soit χ^T la solution de l'équation différentielle ordinaire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$*

$$\begin{aligned} d\chi^T &= [\varphi_t^{*-1}(\bar{b}_t^{i, T, \tilde{\omega}} Y_i)](\chi^T)\, dt, \\ \chi^T(0) &= (x_0, z_0). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Alors $P \otimes \tilde{P}$ p.s., (3.43) a une et une seule solution sur $[0, T]$, qui dépend continûment de T pour la topologie de la convergence compacte des fonctions continues. De plus, pour $\tilde{P}$ p.t. $\tilde{\omega}$, pour tout $T \geqslant 0$, la loi du processus $\omega \rightarrow \pi^1 \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, \chi_t^T)$ $(t \leqslant T)$ est égale à τ_T^z.

Preuve. Pour $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ fixé, par le Théorème 4.1 de [3], on sait que le processus $\bar{\chi}^T = (\rho_t^{0,\tilde{\omega}})^{-1}(\omega, \bar{x}_t^T)$ est tel que

$$d\bar{\chi}^T = (\rho_t^{0,\tilde{\omega}})^{*-1}(\psi_t^{*-1}Y_l)(\rho_t^{0,\tilde{\omega}}(\bar{\chi}_t^T), z_0)\, b_t^{l,T,\tilde{\omega}}(\rho_t^{0,\tilde{\omega}}(\bar{\chi}_t^T))\, dt,$$
$$\bar{\chi}^T(0) = x_0. \tag{3.44}$$

Or comme par le Théorème 4.1 de [3], on a $P \otimes \tilde{P}$ p.s.

$$\varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, x, z_0) = \psi_t(\tilde{\omega}, \rho_t^{0,\tilde{\omega}}(\omega, x), z_0) \tag{3.45}$$

pour $(t, x) \in R^+ \times R^n$ on voit que (3.44) s'écrit aussi sous la forme (3.43). Alors comme (3.43) est à coefficients bornés, pour p.t. $(\omega, \tilde{\omega})$, (3.43) est une équation différentielle ordinaire. Comme $\bar{b}_t^{l,T,\tilde{\omega}}(\chi)$ dépend continûment de T, il est clair que χ^T dépend continûment de T. La fin du Théorème résulte du Théorème 3.13. ∎

Remarque 5. On a pu ainsi construire une version régulière du processus τ_T^z, qu'on réalise pour $\tilde{P}$ p.t. $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ fixé sur l'espace du mouvement brownien (Ω, P). Ainsi, pour $\tilde{P}$ p.t. $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ la loi de $\omega \to \pi^1\varphi_T(\omega, \tilde{\omega}, \chi_T^T)$ est égale à la loi de x_T pour $\tau_T^z \cdot \varphi_T(\omega, \tilde{\omega}, \chi_T^T)$ est par ailleurs un processus continu. Le lecteur curieux pourra se demander si χ_T^T est une semi-martingale sur $(\Omega \times \tilde{\Omega}, P \otimes \tilde{P})$ relativement à la filtration $\{\mathscr{B}_{t+}^{w,\tilde{w}}\}_{t \geq 0}$.

4. Sur l'équation de filtrage

On fait, dans ce paragraphe, toutes les hypothèses de la section (3.c), i.e., les hypothèses $\mathbb{H}1$, $\mathbb{H}2$, $\mathbb{H}6$. Nous allons donner une équation aux dérivées partielles ordinaire que vérifie sous certaines conditions la loi de x_T pour τ_T^z convenablement modifiée à l'aide du flot $\psi_t(\tilde{\omega}, \cdot)$.

La technique que nous allons utiliser est essentiellement dépendante des résultats de la section 2 et de la formule d'intégration par parties du théorème 3.8. Cette dernière formule n'avait jusqu'à présent joué qu'un rôle technique. Elle va maintenant être essentielle pour nous permettre d'obtenir une équation explicite. Naturellement, dans les cas classiques de théorie du filtrage, l'intégration par parties est élémentaire et ne nécessite pas de théorie des flots [10].

Les résultats obtenus ici généralisent ceux que Davis [5] et Eliott et Kohlmann [7] ont obtenus dans le cas "robuste."

On a un premier résultat de caractère technique.

Théorème 4.1. *Soit f une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n$. Alors le processus*

$$\exp\left(-\int_0^t \frac{\partial v_s}{\partial \bar{y}}(\tilde{\omega}, \bar{y}_s)\, d\bar{y}_s\right) f(\bar{x}_t)$$

$$(\text{où } \bar{y}_t = \psi_t^{-1}(\tilde{\omega}, \varphi_t(\omega, \tilde{\omega}, y_0)) \text{ et } \bar{x}_t = \pi^1\bar{y}_t)$$

est une semi-martingale continue dont la décomposition de Meyer s'écrit:

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\int_0^t \frac{\partial v_s}{\partial \bar{y}}(\tilde{\omega}, \bar{y}_s)\, d\bar{y}_s\right) f(\bar{x}_t)\\
&= f(x_0) + \sum_{i=1}^m \int_0^t \exp\left(-\int_0^s \frac{\partial v_u}{\partial \bar{y}}(\tilde{\omega}, \bar{y}_u)\, d\bar{y}_u\right)\\
&\quad \times \left\{\frac{1}{2}(\psi^{*-1}X_i v)^2 f - \frac{1}{2}[(\psi^{*-1}X_i)^2 v] f\right.\\
&\quad \left. - (\psi^{*-1}X_i f)(\psi^{*-1}X_i v) + \frac{1}{2}(\psi^{*-1}X_i)^2 f\right\} ds\\
&\quad + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s \frac{\partial v_u}{\partial \bar{y}}(\tilde{\omega}, \bar{y}_u)\, d\bar{y}_u\right)\\
&\quad \times \{-[(\psi^{*-1}X_i) v] f + (\psi^{*-1}X_i) f\}\, \delta w^i.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Preuve. La formule (4.1) est immédiate par application du calcul de Ito. ∎

DÉFINITION 4.2. Si X est un processus optionnel tel que, pour tout $T \geqslant 0$, $\sup_{t \leqslant T} |X_t|$ est dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ pour $P \otimes \tilde{P}$, on désigne par $\hat{X}$ la projection optionnelle du processus

$$\exp\left(-\int_0^t \frac{\partial v_s}{\partial \bar{y}}(\tilde{\omega}, \bar{y}_s)\, d\bar{y}_s\right) X_t$$

relativement à la filtration $\{\mathscr{B}^z_{t+}\}_{t \geqslant 0}$ pour la mesure $P \otimes \tilde{P}$.

Notons que, comme nous l'avons vu à la section 3, pour *p.t.*$\tilde{\omega}$, $\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \exp\{-\int_0^t (\partial v_s/\partial \bar{y})(\tilde{\omega}, \bar{y}_s)\, d\bar{y}_s\}$ est dans tous les L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ sur (Ω, P) et donc qu'on peut effectivement définir $\hat{X}$.

Rappelons que, grâce à l'hypothèse $\mathbb{H}2$, les filtrations engendrées par z et $\tilde{w}$ sont identiques. On a alors:

THÉORÈME 4.3. *Si f est une fonction C^∞ bornée, à dérivées de tous ordres bornées, $\widehat{f(\bar{x}_t)}$ est un processus continu et de plus:*

$$\begin{aligned}
\widehat{f(\bar{x}_t)} &= f(x_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^m \{\tfrac{1}{2}\widehat{(\psi^{*-1}X_i v)^2 f}\\
&\quad - \tfrac{1}{2}\widehat{[(\psi^{*-1}X_i)^2 v] f} - \widehat{(\psi^{*-1}X_i v)(\psi^{*-1}X_i f)}\\
&\quad + \tfrac{1}{2}\widehat{(\psi^{*-1}X_i)^2 f}\}\, ds.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Preuve. Il est classique, ([6] théorème VI.47), que $\widehat{f(\bar{x}_t)}$ est un processus continu. Compte tenu de (4.1), (4.2) est un résultat classique de théorie du filtrage [10]. ∎

On va maintenant améliorer l'énoncé du théorème 4.3.

DÉFINITION 4.4. Si $Y_t(\tilde{\omega}, y)$ est une fonction borélienne bornée sur $\tilde{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, on note

$$\hat{\mathring{Y}}_t$$

le processus:

$$\hat{\mathring{Y}}_t = \hat{L}_t \int_{\mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)} \exp(-v_t(\tilde{\omega}, \bar{x}_t, z_0))\, Y_t(\tilde{\omega}, \bar{x}_t)\, d\tau_t^z(x). \tag{4.3}$$

Notons que, hors d'un négligeable fixe ($z(\omega, \tilde{\omega}) \in \mathscr{N}$), qui ne dépend pas de Y, $\hat{\mathring{Y}}_t$ est défini sans ambiguité, pour tout t. On a alors:

THÉORÈME 4.5. *Il existe un ensemble Q-négligeable $\mathscr{N}$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$ tel que, si $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathscr{N}$, pour toute fonction f définie sur R^n, bornée à dérivées de tous ordres bornées*

$$\begin{aligned}\hat{\mathring{f}}_t = f(x_0) + \int_0^t \sum_{i=1}^m \{&\tfrac{1}{2}\widehat{(\psi^{*-1}X_i v)^2 f}^{\circ} \\ &- \tfrac{1}{2}\widehat{[(\psi^{*-1}X_i)^2\, v] f}^{\circ} - \widehat{(\psi^{*-1}X_i v)(\psi^{*-1}X_i f)}^{\circ} \\ &+ \tfrac{1}{2}\widehat{(\psi^{*-1}X_i)^2 f}^{\circ}\}\, ds\end{aligned} \tag{4.4}$$

(*où dans* (4.4), $f_t(\tilde{\omega}, x) = f(x)$).

Preuve. Grâce aux théorèmes 2.8 et 3.8, on sait que si f est une fonction vérifiant les hypothèses du théorème,

$$\widehat{f(\bar{x}_t)} \quad \text{et} \quad \hat{\mathring{f}}_t$$

sont des processus continus indistinguables. On en déduit, en particulier, que, si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dense dans $\mathscr{D}$, alors il existe un Q-négligeable $\mathscr{N}$ tel que si $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathscr{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (4.4) est vérifiée avec $f = f_n$. Or clairement, pour t fixé les deux membres de (4.4) définissent des distributions. On en déduit (4.4) pour tout $f \in \mathscr{D}$ puis pour tout f C^∞ bornée à dérivées bornées. ∎

Sous l'hypothèse $\mathbb{H}5$, on sait, par le théorème 2.13, qu'il existe un Q-négligeable $\tilde{\mathcal{N}}^*$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$ tel que, si $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \tilde{\mathcal{N}}^*$, pour $T > 0$, la loi de x_T pour τ_T^z est de la forme $q_T^z(x)\,dx$, où $q_T^z(x)$ est continu en $(T, x) \in\,]0, +\infty[\, \times \mathbb{R}^n$, C^∞ en x, à dérivées en x continues en (T, x). De plus, on sait que pour, $0 < \varepsilon' \leqslant T \leqslant T'$, $q_T^z(x)$ et ses dérivées en x sont uniformément bornées par des constantes dépendant de ε', T', z.

Pour $t > 0$, soit $r_t^z(\bar{x})\,d\bar{x}$ la loi de $\bar{x}_t$ pour τ_T^z. Il est clair que, par la formule de changement de variable, on a:

$$r_t^z(\bar{x}) = q_t^z(\pi^1 \psi_t(\tilde{\omega}, \bar{x}, z_0)) \det \left[\pi^1 \frac{\partial \psi_t}{\partial \bar{x}}(\tilde{\omega}, \bar{x}, z_0)\right]. \tag{4.5}$$

r_T^z a naturellement les mêmes propriétés de régularité que q_T^z. On pose alors la définition suivante:

DÉFINITION 4.6. Si $T(x) = \sum_{i=1}^n T_i(x)(\partial/\partial x_i)$ est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, on désigne par $T^0(x)$ l'opérateur différentiel du premier ordre tel que, si f est une fonction C^∞, on a:

$$(T^0 f)(x) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(T^i(x) f). \tag{4.6}$$

Clairement, si $f, g \in \mathscr{D}$, on a:

$$\int (Tf)\, g\, dx = \int f(T^0 g)\, dx. \tag{4.7}$$

On a alors le résultat essentiel de cette section:

THÉORÈME 4.7. *Sous les hypothèses* $\mathbb{H}1$, $\mathbb{H}2$, $\mathbb{H}5$, $\mathbb{H}6$, *il existe un* Q-*négligeable* $\mathcal{N}$ *dans* $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^p)$ *tel que, si* $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathcal{N}$, *alors si* $s_t^z(\bar{x})$ *est la fonction:*

$$s_t^z(\bar{x}) = \hat{L}_t r_t^z(\bar{x}) \exp\{-v_t(\tilde{\omega}, \bar{x}, z_0)\}$$

alors s_t^z *est une fois dérivable en* $(t, \bar{x})$, C^∞ *en* $\bar{x}$ *et à dérivées continues pour* $(t, \bar{x}) \in\,]0, +\infty[\, \times \mathbb{R}^n$; *de plus,* s_t^z *vérifie l'équation aux dérivées partielles:*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s_t^z}{\partial t}(\bar{x}) = \sum_{l=1}^m \Bigg\{ & \frac{1}{2}\,[(\psi^{*-1} X_l v)^2 (\bar{x}, z_0) \\
& - (\psi^{*-1} X_l)^2\, v(\bar{x}, z_0)]\, s_t^z(\bar{x}) \\
& - (\psi^{*-1} X_l)^0\, [(\psi^{*-1} X_l v)(\bar{x}, z_0)\, s_t^z(\bar{x})] \\
& + \frac{1}{2}\,[(\psi^{*-1} X_l)^0]^2\, s_t^z(\bar{x}) \Bigg\}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

et enfin:

$$\lim_{t \to 0} s_t^z(\bar{x})\, d\bar{x} = \delta_{x_0}. \tag{4.9}$$

Preuve. On sait que, si $\mathcal{N}$ est le Q-négligeable défini au théorème 4.5, si $z(\omega, \tilde{\omega}) \notin \mathcal{N}$, si $f \in \mathcal{D}$, alors:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(\bar{x})\, s_t^z(\bar{x})\, d\bar{x} = f(x_0) + \sum_{i=1}^m \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \{\tfrac{1}{2}[(\psi^{*-1}X_i v)^2\, (\bar{x}, z_0) \\ - (\psi^{*-1}X_i)^2\, v(\bar{x}, z_0)]\, f(\bar{x}) \\ - (\psi^{*-1}X_i)\, v(\bar{x}, z_0)(\psi^{*-1}X_i) f(\bar{x}) \\ + \tfrac{1}{2}(\psi^{*-1}X_i)^2 f(\bar{x})\}\, s_u^z(\bar{x})\, d\bar{x}\, du.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Comme $s_u^z(y)$ est C^∞ en y pour $u > 0$, on peut intégrer par parties dans le membre de droite de (4.10) et on trouve:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(\bar{x})\, s_t^z(\bar{x})\, d\bar{x} = f(x_0) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(\bar{x}) \sum_{i=1}^m \{\tfrac{1}{2}[(\psi^{*-1}X_i v)^2\, (\bar{x}, z_0) \\ - (\psi^{*-1}X_i)^2\, v(\bar{x}, z_0)]\, s_u^z(\bar{x}) \\ - (\psi^{*-1}X_i)^0\, [(\psi^{*-1}X_i v)\, s_u^z(\bar{x})] \\ + \tfrac{1}{2}[(\psi^{*-1}X_i)^0]^2\, s_u^z(\bar{x})\}\, d\bar{x}\, du.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Comme la fonction entre $\{\ \}$ dans le membre de droite de (4.11) est C^∞ en $\bar{x}$ pour $t > 0$, on tire de (4.11) que, pour $0 < t_0 < t$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}s_t^z(\bar{x}) = s_{t_0}^z(\bar{x}) + \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^m \{\tfrac{1}{2}[(\psi^{*-1}X_i v)^2\, (\bar{x}, z_0) \\ - (\psi^{*-1}X_i)^2\, v(\bar{x}, z_0)]\, s_u^z(\bar{x}) \\ - (\psi^{*-1}X_i)^0\, [(\psi^{*-1}X_i v)\, s_u^z](\bar{x}) \\ + \tfrac{1}{2}[(\psi^{*-1}X_i)^0]^2\, s_u^z(\bar{x})\}\, du.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Par (4.12), on voit que, pour $t > 0$, $(\partial s_t^z/\partial t)(\bar{x})$ existe et est continu en $(t, \bar{x})$. Ainsi, s_t^z est de classe C^1 sur $]0, +\infty[\, \times \mathbb{R}^n$ et vérifie (4.8). Enfin, comme $\lim_{T \to 0} q_T^z(x)\, dx = \delta_{x_0}$, comme $\hat{L}_0 = 1$, on a bien (4.9).

Remarque 1. On peut retrouver r_t^z à partir de s_t^z en notant que:

$$r_t^z(\bar{x}) = \frac{s_t^z(\bar{x}) \exp(v_t(\tilde{\omega}, \bar{x}, z_0))}{\int_{\mathbb{R}^n} s_t^z(\bar{y}) \exp(v_t(\tilde{\omega}, \bar{y}, z_0))\, d\bar{y}} \tag{4.13}$$

puisque $r_t^z(\bar{x})\,d\bar{x}$ est une mesure proportionnelle à $s_t^z(\bar{x})\exp(v_t(\tilde{\omega}, \bar{x}, z_0))\,d\bar{x}$ et de masse 1.

Notons que, même s'il est satisfaisant d'écrire une équation aux dérivées partielles vérifiée par s_t^z, il ne paraît pas que, sous l'hypothèse $\mathbb{H}5$, on puisse invoquer un résultat classique sur les équations aux dérivées partielles pour obtenir la régularité des solutions de l'équation (4.8). En effet, c'est la dépendance en temps, qui est en général très irrégulière, des champs de vecteurs $\psi_t^{*-1}Y_i$ qui explique en partie la régularité de $s_t^z(y)$ mais, naturellement, on ne peut pas invoquer le théorème de Hörmander [9] pour en déduire la régularité des solutions de (4.8). Dans le cas partiellement elliptique où l'hypothèse $\mathbb{H}3$ est vérifiée, on peut invoquer les résultats généraux sur les opérateurs elliptiques.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. M. BISMUT, "Mécanique aléatoire," Lecture Notes in Mathematics N°. 866, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1981.
2. J. M. BISMUT, Flots stochastiques et formule de Ito–Stratonovitch généralisée, C. R. *Acad. Sci. Paris Sec. A–B* **290** (1980), 483–486.
3. J. M. BISMUT, A generalized formula of Ito and some other properties of stochastic flows, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **55** (1981), 331–350.
4. J. M. BISMUT, Martingales, the Malliavin calculus and hypoellipticity under general Hörmander's conditions, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **56** (1981), 469–505.
5. M. H. A. DAVIS, Pathwise non linear filtering, "Stochastic Systems" (M. Hazewinkel, Ed.), Reidel, Dordrecht, à paraître.
6. C. DELLACHERIE ET P. A. MEYER, "Probabilités et potentiels," 2e éd., Chapitres I–IV, Hermann, Paris, 1975; Chapitres V–VIII. Hermann, Paris, 1980.
7. R. J. ELIOTT ET M. KOHLMANN, Robust filtering for correlated multidimensional observations, preprint 1981.
8. U. HAUSSMANN, On the integral representation of Ito processes, *Stochastics* **3** (1979), 17–27.
9. L. HÖRMANDER, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.* **119** (1967), 147–171.
10. R. S. LIPTSER ET A. N. SHIRYAYEV, "Statistics of Random Processes," Vols. I, II, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1977–1978.
11. E. PARDOUX, Équations du filtrage non linéaire, de la prédiction et du lissage, prépublication de l'Université de Provence 1980.
12. D. W. STROOCK ET S. R. S. VARADHAN, "Multidimensional Diffusion Processes," Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 233, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1979.
13. J. M. BISMUT ET D. MICHEL, Diffusions conditionnelles, I, *J. Funct. Anal.* **44** (1981), 174–211.
14. Y. N. BLAGOVESHCHENSKII ET M. I. FREIDLIN, Certain properties of processes depending on parameters. *Sov. Math. Dokl.* **2** (1961), 633–636.
15. A. D. VENTZELL, On equations of the theory of conditional processes, *Theory Probab. Appl.* **10** (1965), 357–361.
16. B. L. ROZOVSKII, A formula of Ito–Ventcel, *Vestnik Moskou Univ. Ser.* 1 *Math. Meh.* **1** (1973), 26–32.